

随机区间时延的网络控制系统控制器设计

陈孟伟, 金朝永, 朱婧丽, 卢 萍

(广东工业大学 应用数学学院, 广东 广州 510520)

摘要: 针对网络控制系统中网络存在时延问题, 采用随机时延建模方法, 将不同负载情况下的时延表示成区间变量, 通过具有范数有界不确定性的离散 Markov 跳变系统描述系统模型, 进行系统的随机稳定性分析, 基于线性矩阵不等式设计状态反馈控制器. 最后通过数值仿真验证控制器设计算法的有效性.

关键词: 网络控制系统; 区间时延; Markov 跳变系统; 线性矩阵不等式; 控制器

中图分类号: O231.3

文献标志码: A

文章编号: 1007-7162(2012)01-0059-05

Design of Stochastic Interval Delay Controllers of Networked Control Systems

Chen Meng-wei, Jing Chao-yong, Zhu Jing-li, Lu Ping

(Faculty of Applied Mathematics, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510520, China)

Abstract: Regarding the problem with the network delay of the network control systems, the random time delay modeling method is used. First, interval delay under different conditions was put into a range of variables. Second, the state feedback controller was designed, based on linear matrix inequality. Third, by describing the system model with the norm bounded by the uncertainty of discrete Markov jump systems, the random stability of the system was analyzed. Numerical simulation verifies the effectiveness of the algorithm.

Key words: network control system; interval delay; Markov jump systems; linear matrix inequalities; controller

近年来,随着控制系统技术的不断发展,系统规模的日益扩大,控制性能要求的不断提高,更多的系统将各种传感器、控制器、执行器通过网络连接起来,形成网络控制系统(Networked Control Systems, NCS),其优点是可实现资源共享、具有较高的自诊断能力、安装与维护简单及增加系统的灵活性和可配置性.但是由于将通讯网络的引入,控制系统的分析与设计变得非常困难^[1-2].控制系统中网络的存在也带来了一些问题:(1)网络诱导时延,包括通讯时延和计算时延.存在常数时延、时变时延、有界时延、随机时延等.文献[2]研究了时延为随机分布时,网络控制系统的随机最优控制问题;文献[3]把网络控制系统建模为混杂系统,给出了当网络时延小于一个采样周期时,系统稳定的充分条件;文献[4]把文献[3]的结果扩展到时延大于一个采样周期的情况.(2)数据包丢失.文献[4]把具有数据包

丢失的NCS建模成带有事件率约束的异步动态系统.在文献[5]中,作者首先针对没有数据包丢失的系统采用线性二次高斯方法设计控制器,然后,针对一种特殊情形,利用跳变系统的方法给出了具有某数据包丢失概率的NCS的稳定性判定条件.

近年来,已有一些学者涉及网络控制系统建模与分析工作,并取得一定的成果,文献[6]建立一个混合系统模型,基于丢包和时延给出了系统稳定性条件和鲁棒控制器的设计方法;文献[7]针对线性、连续的网络控制系统状态向量无法直接测量的情况,通过设立状态观测器,并且给出了系统全局指数稳定的条件;文献[8]考虑网络时延小于一个采样周期的条件下,提出了基于T-S模型的网络控制系统控制器设计方法,并且给出了系统稳定的充分条件;文献[6]在文献[8]的基础上,考虑具有随机时延的情况,研究了基于模糊模型的离散时滞系统控

制器设计与稳定性问题.

本文采用随机时延建模方法,将不同负载情况下的时延表示成区间变量,通过具有范数有界不确定性的离散 Markov 跳变系统描述系统模型,基于线性矩阵不等式设计控制器,避免复杂的随机迭代计算.

1 系统描述

考虑图 1 所示的 NCS 模型.

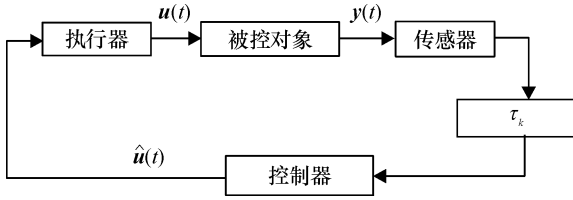


图 1 网络控制系统模型

Fig. 1 Network control system model

在分析随机时延的过程中,对图 1 所示的系统作如下合理假设.

1) 系统的传感器节点是时钟驱动的,而控制器和执行器节点是事件驱动的,这样可以避免采用时钟驱动带来的过长数据等待时延.

2) 网络只存在于传感器和控制器之间.

3) 网络时延是有界的,在一个固定的区间内变化,且小于一个采样周期 h .

4) 不考虑过程干扰和测量噪声.

基于上述假设,被控对象的线性连续受控模型是

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t), \end{cases} \quad (1)$$

其中, $\mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^n$ 是状态向量, $\mathbf{u}(t) \in \mathbf{R}^m$ 是输入, $\mathbf{y}(t) \in \mathbf{R}^q$ 是系统输出, $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbf{R}^{n \times m}$, $\mathbf{C} \in \mathbf{R}^{q \times n}$ 是常数矩阵.

定义 1^[1] 随机区间时延: 设 $\{r_k\}$ 为 k 时刻与网络负载情况相对应的 Markov 链状态,网络在各种状态下的转移概率为 $\mathbf{p}_r(r_{k+1}=j|r_k=i) = \mathbf{p}_{ij}, \forall i, j \in (1, 2, \dots, N)$. 在不同的负载状态下,网络传输时延的大小也不同,设由 $\tau_k(r_k)$ 表示,在不同的负载状态下,时延能用区间变量表示,即 $\tau_k(r_k) \in [\tau_k^{\cup}(r_k), \tau_k^{\cap}(r_k)]$.

由于时延对系统的影响,在采样时刻离散化这一连续系统得到

$$\mathbf{x}_{k+1} = \phi \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_0(\tau_k) \mathbf{u}_k + \mathbf{v}_1(\tau_k) \mathbf{u}_{k-1}, \quad (2)$$

其中

$$\phi = e^{A_h}, \mathbf{v}_0(\tau_k) = \int_0^{h-\tau_k} e^{A_s} ds \mathbf{B}, \mathbf{v}_1(\tau_k) = \int_{h-\tau_k}^h e^{A_s} ds \mathbf{B}. \quad (3)$$

由式(3)可知, $\mathbf{v}_0(\tau_k)$ 和 $\mathbf{v}_1(\tau_k)$ 是由区间 $\tau_k(r_k) \in [\tau_k^{\cup}(r_k), \tau_k^{\cap}(r_k)]$ 确定的连续变量. 通过式(3)可以计算出它们的边界:

$$\mathbf{v}_0(\tau_k) \in [\bar{\mathbf{v}}_0^{\cup}(\tau_k), \bar{\mathbf{v}}_0^{\cap}(\tau_k)], \mathbf{v}_1(\tau_k) \in [\bar{\mathbf{v}}_1^{\cup}(\tau_k), \bar{\mathbf{v}}_1^{\cap}(\tau_k)]. \quad (4)$$

引入矩阵:

$$\bar{\mathbf{v}}_0(r_k) = \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{v}}_0^{\cup}(r_k) + \bar{\mathbf{v}}_0^{\cap}(r_k)), \bar{\mathbf{v}}_0^{\pm}(r_k) = \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{v}}_0^{\cup}(r_k) - \bar{\mathbf{v}}_0^{\cap}(r_k)), \quad (5)$$

$$\bar{\mathbf{v}}_1(r_k) = \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{v}}_1^{\cup}(r_k) + \bar{\mathbf{v}}_1^{\cap}(r_k)), \bar{\mathbf{v}}_1^{\pm}(r_k) = \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{v}}_1^{\cup}(r_k) - \bar{\mathbf{v}}_1^{\cap}(r_k)). \quad (6)$$

根据区间矩阵的性质,矩阵 $\mathbf{v}_0(r_k)$ 、 $\mathbf{v}_1(r_k)$ 可以表示成

$$\mathbf{v}_0(r_k) = \bar{\mathbf{v}}_0(r_k) + \mathbf{E}_0(r_k) \Delta_0 \mathbf{D}_0(r_k), \Delta_0^T \Delta_0 \leq \mathbf{I}, \quad (7)$$

$$\mathbf{v}_1(r_k) = \bar{\mathbf{v}}_1(r_k) + \mathbf{E}_1(r_k) \Delta_1 \mathbf{D}_1(r_k), \Delta_1^T \Delta_1 \leq \mathbf{I}. \quad (8)$$

定义新变量

$$\mathbf{E}(r_k) = [\mathbf{E}_0(r_k) \quad \mathbf{E}_1(r_k)], \Delta = \text{diag}(\Delta_0, \Delta_1), \quad (9)$$

$$\mathbf{H}_0(r_k) = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_0(r_k) \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{H}_1(r_k) = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{D}_1(r_k) \end{bmatrix}, \quad (10)$$

$$[\Delta \mathbf{v}_0(r_k) \Delta \mathbf{v}_1(r_k)] = \mathbf{E}(r_k) \Delta [\mathbf{H}_0(r_k) \mathbf{H}_1(r_k)], \Delta^T \Delta \leq \mathbf{I}. \quad (11)$$

至此,离散化的被控系统(2)可以由不确定离散 Markov 跳变系统描述,即

$$\mathbf{x}_{k+1} = \phi \mathbf{x}_k + [\bar{\mathbf{v}}_0(r_k) + \Delta \mathbf{v}_0(r_k)] \mathbf{u}_k + [\bar{\mathbf{v}}_1(r_k) + \Delta \mathbf{v}_1(r_k)] \mathbf{u}_{k-1}. \quad (12)$$

为分析方便,当 $r_k = i$ 时,记 $\mathbf{g}(r_k) = \mathbf{g}_i$,例如记 $\mathbf{E}(r_k)$ 为 $\mathbf{E}_i$. 这样,通过对随机时延的分析,建立出如式(12)的网络控制系统模型,进而可以利用随机 Markov 跳变系统的设计方法来分析带有随机时延的网络控制系统的稳定性问题^[9-10].

针对式(12)的系统,考虑设计形式的状态反馈控制器,当 $r_k = i$ 时,

$$\mathbf{u}_k = \mathbf{F}_i \mathbf{x}_i \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (13)$$

控制器的反馈增益 $\mathbf{F}_i$ 根据被控系统的工作模

式切换相应的取值.

定义新变量 $\mathbf{z}_k = [\mathbf{x}_k^T \quad \mathbf{u}_{k-1}^T]^T$, 将式(13)代入系统(12)得到闭环系统方程, 当 $r_k = i$ 时,

$$\mathbf{z}_{k+1} = (\mathbf{G}_i + \Delta\mathbf{G}_i)\mathbf{z}_k, \quad (14)$$

其中

$$\mathbf{G}_i = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi} + \bar{\mathbf{v}}_{0i} & \bar{\mathbf{v}}_{0i} \\ \mathbf{F}_i & 0 \end{bmatrix}, \Delta\mathbf{G}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_i \\ 0 \end{bmatrix} \Delta [\mathbf{H}_{0i} \mathbf{F}_i \quad \mathbf{H}_{1i}] = \mathbf{M}_i \Delta \mathbf{N}_i. \quad (15)$$

2 闭环系统稳定性分析

为证明闭环系统(14)的稳定性,需用到以下的定义和引理.

定义 2^[1] 对于离散 Markov 跳变系统(14),如果对于任意的初始状态 $(\mathbf{z}_0, \mathbf{r}_0)$ 都满足

$$E \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} |\mathbf{z}_k(\mathbf{z}_0, \mathbf{r}_0)|^2 \mid \mathbf{z}_0, \mathbf{r}_0 \right\} < \infty, \quad (16)$$

其中, $E\{\cdot\}$ 表示随机变量的期望值. 那么, 系统(14)的平衡点是随机稳定的.

引理 1^[1] $\mathbf{A}, \mathbf{H}, \mathbf{E}$ 和 $\mathbf{F}$ 是适维阵, 且 $\mathbf{F}^T \mathbf{F} \leq \mathbf{I}$. 如果对任意对称阵 $\mathbf{P} > 0$ 及标量 $\varepsilon > 0$, 有 $\varepsilon \mathbf{I} - \mathbf{E}^T \mathbf{P} \mathbf{E} > 0$ 成立, 则

$$(\mathbf{A} + \mathbf{E} \mathbf{F} \mathbf{H})^T \mathbf{P} (\mathbf{A} + \mathbf{E} \mathbf{F} \mathbf{H}) \leq \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{E} (\varepsilon \mathbf{I} - \mathbf{E}^T \mathbf{P} \mathbf{E})^{-1} \mathbf{E}^T \mathbf{P} \mathbf{A} + \varepsilon \mathbf{H}^T \mathbf{H}. \quad (17)$$

定理 1 假设系统(14)在计算控制器命令式(13)时, 受控系统(2)的状态以及 kh 时刻之前的时延情况可知, 如果存在矩阵 $\mathbf{p}_i > 0$ 和常数 $\varepsilon_i > 0$ 满足如下的线性矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G}_i^T \bar{\mathbf{P}}_i \mathbf{G}_i - \mathbf{P}_i + \varepsilon_i \mathbf{N}_i^T \mathbf{N}_i & \mathbf{G}_i^T \bar{\mathbf{P}}_i \mathbf{M}_i \\ \mathbf{M}_i^T \bar{\mathbf{P}}_i \mathbf{G}_i & -(\varepsilon_i \mathbf{I} - \mathbf{M}_i^T \bar{\mathbf{P}}_i \mathbf{M}_i) < 0, i=1, 2, \dots, N \end{bmatrix}, \quad (18)$$

其中

$$\bar{\mathbf{P}}_i = \sum_{j=1}^N \mathbf{P}_{ij} \mathbf{P}_j, \quad (19)$$

那么, 闭环系统(14)是随机稳定的.

证明 根据定义 2, 引入如下的 Lyapunov 函数 $V_k(\mathbf{z}_k, r_k) = \mathbf{z}_k^T \mathbf{P}(r_k) \mathbf{z}_k$, (20)

当 $r_k = i$ 时, $\mathbf{P}(r_k) = \mathbf{p}_i$. 对于系统(14)有

$$E\{V_{k+1}(\mathbf{z}_{k+1}, r_{k+1}) \mid \mathbf{z}_k, r_k = i\} - V_k(\mathbf{z}_k, r_k = i) =$$

$$(\mathbf{L}_i + \mathbf{R}_i \bar{\mathbf{F}}_i)^T \bar{\mathbf{P}}_i (\mathbf{L}_i + \mathbf{R}_i \bar{\mathbf{F}}_i) - \mathbf{P}_i + \varepsilon_i (\mathbf{S}_i + \mathbf{H}_{0i} \bar{\mathbf{F}}_i)^T (\mathbf{S}_i + \mathbf{H}_{0i} \bar{\mathbf{F}}_i) * \\ \mathbf{M}_i^T \bar{\mathbf{P}}_i (\mathbf{L}_i + \mathbf{R}_i \bar{\mathbf{F}}_i) - (\varepsilon_i \mathbf{I} - \mathbf{M}_i^T \bar{\mathbf{P}}_i \mathbf{M}_i) < 0, \quad (28)$$

$$\sum_{j=1}^N \mathbf{p}^T(r_{k+1} = j \mid i) \mathbf{z}_{k+1}^T \mathbf{P}_j \mathbf{z}_{k+1} - \mathbf{z}_k^T \mathbf{P}_i \mathbf{z}_k = \mathbf{z}_k^T \left\{ (\mathbf{G}_i + \mathbf{M}_i \Delta \mathbf{N}_i)^T \bar{\mathbf{P}}_i (\mathbf{G}_i + \mathbf{M}_i \Delta \mathbf{N}_i) - \mathbf{P}_i \right\} \mathbf{z}_k. \quad (21)$$

由引理 1 及式(18)可得

$$E\{V_{k+1}(\mathbf{z}_{k+1}, r_{k+1}) \mid \mathbf{z}_k, r_k = i\} - V_k(\mathbf{z}_k, r_k = i) \leq \mathbf{z}_k^T \left\{ (\mathbf{G}_i^T \bar{\mathbf{P}}_i \mathbf{G}_i - \mathbf{P}_i + \mathbf{G}_i^T \bar{\mathbf{P}}_i \mathbf{M}_i (\varepsilon_i \mathbf{I} - \mathbf{M}_i^T \bar{\mathbf{P}}_i \mathbf{M}_i)^{-1} \mathbf{M}_i^T \bar{\mathbf{P}}_i \mathbf{G}_i + \varepsilon_i \mathbf{N}_i^T \mathbf{N}_i) \right\} \mathbf{z}_k = \mathbf{z}_k^T \mathbf{Q}_i \mathbf{z}_k < 0,$$

对于 $\mathbf{z}_k \neq 0$, 由于 $\mathbf{p}_i > 0$, $\mathbf{Q}_i < 0$,

$$\frac{E\{V_{k+1}(\mathbf{z}_{k+1}, r_{k+1}) \mid \mathbf{z}_k, r_k = i\} - V_k(\mathbf{z}_k, r_k = i)}{V_k(\mathbf{z}_k, r_k)} < 0$$

$$\frac{\mathbf{z}_k^T \mathbf{Q}_i \mathbf{z}_k}{\mathbf{z}_k^T \mathbf{P}_i \mathbf{z}_k} \leq \alpha - 1, \quad (22)$$

其中

$$\alpha = 1 - \min_{i \in s} \left\{ \frac{\lambda_{\min}(\mathbf{Q}_i)}{\lambda_{\max}(\mathbf{P}_i)} \right\} < 1, \quad (23)$$

应用随机稳定性的结论, 由 $\mathbf{p}_i > 0$, $\mathbf{Q}_i < 0$ 可知

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E\left\{ \sum_{k=0}^N |\mathbf{z}_k(\mathbf{z}_0, \mathbf{r}_0)|^2 \mid \mathbf{z}_0, \mathbf{r}_0 \right\} \leq \bar{\mathbf{M}}, \quad (24)$$

其中, $\bar{\mathbf{M}}$ 是正实数.

这样, 结合定义 2 可得, 闭环系统(14)是随机稳定的.

3 状态反馈控制器设计

针对式(13)所示的网络控制系统设计的状态反馈控制器进行设计.

$$\text{令 } \bar{\mathbf{F}}_i = [\mathbf{F}_i \quad 0], \bar{\mathbf{F}}_i \in \mathbf{R}^{m \times (n+m)},$$

则当 $r_k = i$ 时,

$$\mathbf{u}_k = \bar{\mathbf{F}}_i \mathbf{z}_k, i=1, 2, \dots, N. \quad (25)$$

对于闭环系统(14), 可以将 $\mathbf{G}_i$ 和 $\Delta\mathbf{G}_i$ 改写成

$$\mathbf{G}_i = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi} & \bar{\mathbf{v}}_{1i} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{v}}_{0i} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \bar{\mathbf{F}}_i = \mathbf{L}_i + \mathbf{R}_i \bar{\mathbf{F}}_i, \quad (26)$$

$$\Delta\mathbf{G}_i = \mathbf{M}_i \Delta ([0 \quad \mathbf{H}_{1i}] + \mathbf{H}_{0i} \bar{\mathbf{F}}_i) = \mathbf{M}_i \Delta (\mathbf{S}_i + \mathbf{H}_{0i} \bar{\mathbf{F}}_i). \quad (27)$$

将式(26)、(27)的参数代入定理 1, 那么闭环系统稳定的充分条件可改写为

* 表示矩阵不等式的对称部分. 令 $\mathbf{X}_i = \mathbf{P}_i^{-1}$, 根据 $\bar{\mathbf{F}}_i$ 的结构将 $\mathbf{X}_i$ 分成 $n \times n$ 、 $n \times m$ 、 $m \times n$ 和 $m \times m$ 的 4 块, 那么有 $\bar{\mathbf{F}}_i \mathbf{X}_i = \bar{\mathbf{F}}_i \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{11i} & \mathbf{X}_{12i} \\ * & \mathbf{X}_{22i} \end{bmatrix} =$

$$(\mathbf{L}_i \mathbf{X}_i + \mathbf{R}_i \mathbf{Y}_i)^\top \bar{\mathbf{P}}_i (\mathbf{L}_i \mathbf{X}_i + \mathbf{R}_i \mathbf{Y}_i) - \mathbf{P}_i + \varepsilon_i (\mathbf{S}_i \mathbf{X}_i + \mathbf{H}_{0i} \mathbf{Y}_i)^\top, (\mathbf{S}_i \mathbf{X}_i + \mathbf{H}_{0i} \mathbf{Y}_i)^\top$$

*

$$\mathbf{M}_i^\top \bar{\mathbf{P}}_i (\mathbf{L}_i \mathbf{X}_i + \mathbf{R}_i \mathbf{Y}_i) - (\varepsilon_i \mathbf{I} - \mathbf{M}_i^\top \bar{\mathbf{P}}_i \mathbf{M}_i) < 0. \quad (30)$$

令

$$\mathbf{U}_i = [\sqrt{\mathbf{p}_{i1}} (\mathbf{L}_i \mathbf{X}_i + \mathbf{R}_i \mathbf{Y}_i)^\top \mathbf{L} \sqrt{\mathbf{p}_{iN}} (\mathbf{L}_i \mathbf{X}_i + \mathbf{R}_i \mathbf{Y}_i)^\top], \quad (31)$$

$$\mathbf{V}_i = [\sqrt{\mathbf{P}_{i1}} \mathbf{M}_i^\top \mathbf{L} \sqrt{\mathbf{P}_{iN}} \mathbf{M}_i^\top \mathbf{L}], \quad (32)$$

$$\mathbf{W} = \text{diag}(\mathbf{X}_i \mathbf{L} \mathbf{X}_N). \quad (33)$$

这样, 不等式(30)等价于下面的线性矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{X}_i & * & * & * \\ \mathbf{S}_i \mathbf{X}_i + \mathbf{H}_{i0} \mathbf{Y}_i & \lambda_i \mathbf{I} & * & * \\ \mathbf{U}_i^\top & 0 & -\mathbf{W} & * \\ 0 & 0 & \lambda_i \mathbf{V}_i & \lambda_i \mathbf{I}, \end{bmatrix} < 0, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (34)$$

由上述可得到以下的控制器设计方法.

结论 1 如果存在矩阵 $\mathbf{X}_i > 0$, $\mathbf{Y}_i$ 和常数 λ_i 满足线性矩阵不等式(34), 那么状态反馈控制器(13)能够随机镇定系统(12), 并且控制器的阵增益矩阵 $\mathbf{F}_i$ 由下式计算得到

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{Y}_i \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{11i}^\top \\ \mathbf{X}_{12i}^\top \end{bmatrix} (\mathbf{X}_{11i} \mathbf{X}_{11i}^\top + \mathbf{X}_{12i} \mathbf{X}_{12i}^\top)^{-1}. \quad (35)$$

由于 $\mathbf{X}_i > 0$, 保证了 $\mathbf{X}_{11i} > 0$, 因而保证 $\mathbf{X}_{11i} \mathbf{X}_{11i}^\top + \mathbf{X}_{12i} \mathbf{X}_{12i}^\top$ 是可逆矩阵.

4 数值仿真

4.1 网络控制系统

考虑图 1 所示的网络控制系统. 设其采样周期为 $h = 0.05$ s. 被控系统模型为

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t),$$

与网络负载情况相对应的 Markov 链状态为 $r_k = 1, 2, 3$ 分别表示网络处于低、中、高负载情况. 网络传输时延的变化由不同的负载确定. 当 $r_k = 1$ 时, $\tau_k \in [0, 0.2h]$; 当 $r_k = 2$ 时, $\tau_k \in [0.2h, 0.6h]$; 当 $r_k = 3$ 时,

$$\mathbf{F}_i [\mathbf{X}_{11i} \quad \mathbf{X}_{12i}] = \mathbf{Y}_i. \quad (29)$$

用 $\text{diag}(\mathbf{X}_i, \mathbf{I})$ 前后分别乘以式(29), 可知, 充分条件(28)等价

$\tau_k \in [0.5h, h]$. 各个状态的相互转化概率矩阵为

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.3 & 0.6 & 0.1 \\ 0.3 & 0.6 & 0.1 \end{bmatrix}.$$

4.2 区间时延下模型建立

利用式(3)~式(11)进行被控系统在采样时刻离散化, 计算得到参数矩阵

$$\phi = e^{Ah} = \begin{bmatrix} 0.9965 & 0.0453 \\ -0.1358 & 0.8154 \end{bmatrix},$$

当 $r_k = 1$ 时, $\tau_k \in [0, 0.2h]$:

$$\bar{\mathbf{v}}_{01} = \begin{bmatrix} 0.0069 \\ -0.0790 \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{v}}_{11} = \begin{bmatrix} -0.0057 \\ 0.1242 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} 0.0831 & 0 \\ 0 & 0.3524 \end{bmatrix}, \mathbf{H}_{01} = \mathbf{H}_{11} = \begin{bmatrix} 0.0831 \\ 0.3524 \end{bmatrix};$$

当 $r_k = 2$ 时, $\tau_k \in [0.2h, 0.6h]$:

$$\bar{\mathbf{v}}_{02} = \begin{bmatrix} 0.0007 \\ -0.0322 \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{v}}_{12} = \begin{bmatrix} -0.0005 \\ 0.0130 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} 0.0221 & 0 \\ 0 & 0.1141 \end{bmatrix}, \mathbf{H}_{02} = \mathbf{H}_{12} = \begin{bmatrix} 0.0221 \\ 0.1141 \end{bmatrix};$$

当 $r_k = 3$ 时, $\tau_k \in [0.5h, h]$:

$$\bar{\mathbf{v}}_{03} = \begin{bmatrix} 0.0002 \\ -0.0119 \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{v}}_{13} = \begin{bmatrix} -0.0010 \\ 0.0334 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{E}_3 = \begin{bmatrix} 0.0123 & 0 \\ 0 & 0.1090 \end{bmatrix}, \mathbf{H}_{03} = \mathbf{H}_{13} = \begin{bmatrix} 0.0123 \\ 0.1090 \end{bmatrix}.$$

将上述系统参数代入式(12), 即可得到在随机区间时延情况下网络控制系统的模型.

4.3 状态反馈控制器设计算法

利用 Markov 链和由它确定的时延区间, 结合前文的式(2)~(34), 被控系统(12)、(14)被转化为带不确定矩阵的离散 Markov 跳变系统.

$$\mathbf{x}_{k+1} = \phi \mathbf{x}_k + [\bar{\mathbf{v}}_{0i} + \mathbf{E}_{i\Delta} \mathbf{H}_{0i}] \mathbf{u}_k +$$

$$[\bar{\mathbf{v}}_{1i} + \mathbf{E}_{i\Delta} \mathbf{H}_{1i}] \mathbf{u}_{k-1}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (36)$$

将上述的各个参数 $\phi, \bar{\mathbf{v}}_{0i}, \bar{\mathbf{v}}_{1i}, \mathbf{E}_i, \mathbf{H}_{0i}$ 以及 $\mathbf{H}_{1i}$ 代入式(26)(27)得到 $\mathbf{L}_i, \mathbf{R}_i, \mathbf{M}_i$ 和 $\mathbf{S}_i$, 进而利用 Matlab 的 LMI 工具箱求得满足线性矩阵不等式(34)的未知参数 $\mathbf{X}_i$ 和 $\mathbf{Y}_i$.

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_1 &= \begin{bmatrix} 3.3219 & -2.8637 & -0.1131 \\ -2.8637 & 8.3929 & -0.4109 \\ -0.1131 & -0.4109 & 7.0260 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{X}_2 &= \begin{bmatrix} 3.3566 & -2.8747 & -0.1479 \\ -2.8747 & 9.3693 & -0.0601 \\ -0.1479 & -0.0601 & 7.3499 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{X}_3 &= \begin{bmatrix} 3.0728 & -2.2814 & -0.1533 \\ -2.2814 & 6.6706 & -0.0229 \\ -0.1533 & -0.0229 & 7.3201 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{Y}_1 &= [-0.1315 \quad 0.2870 \quad -1.0392], \\ \mathbf{Y}_2 &= [-0.1337 \quad -0.3814 \quad -0.0906], \\ \mathbf{Y}_3 &= [-0.1364 \quad -0.1618 \quad -0.0885]. \end{aligned}$$

根据矩阵 $\mathbf{Y}_i$, 将 $\mathbf{X}_i$ 分为 $2 \times 2, 2 \times 1, 1 \times 2, 1 \times 1$ 的4个子块, 利用式(35)即可求出网络控制系统(35)的状态反馈控制器参数

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1 &= [0.0448 \quad 0.0598], \\ \mathbf{F}_2 &= [-0.0980 \quad -0.0705], \\ \mathbf{F}_3 &= [-0.0794 \quad -0.0503]. \end{aligned} \quad (37)$$

在 Matlab 仿真过程中, 设网络时延为 $[0, 0.05]$ 上的均匀分布的随机信号. 结果表明, 在状态反馈控制器(35)的作用下, 闭环系统随机稳定.

5 结论

Nilsson^[2] 利用 LQG 最优设计方法得到了具有随机时延的网络控制系统随机控制器, 然而该方法中的随机 Riccati 迭代方程求解过程非常复杂. 本文

采用随机时延建模方法, 将不同负载情况下的时延表示成区间变量, 通过具有范数有界不确定性的离散 Markov 跳变系统描述系统模型, 基于线性矩阵不等式设计控制器, 避免了复杂的随机迭代计算.

参考文献:

- [1] 王岩, 孙增圻. 网络控制系统分析与设计[M]. 北京: 清华大学出版社, 2009.
- [2] Benhardsson N J, Wittenmark B. Stochastic analysis and control of real-time systems with delay[J]. Automatica, 1998, 34(1): 57-64.
- [3] Zhang W, Braniky M S. Stability of networked control systems[J]. IEEE Control Systems Magazine, 2001, 21(1): 84-99.
- [4] Hu S S, Zhu Q X. Stochastic optimal control and analysis of stability of networked control systems with long delay[J]. Automatica, 2003, 39(11): 1877-1884.
- [5] Yue Dong, Han Qing-long. Networked-based robust control of systems with uncertainty[J]. Automatica, 2005, 41(12): 999-1007.
- [6] 崔桂梅, 李小明. 网络闭环系统的离散模糊控制[J]. 辽宁工程技术大学学报, 2007, 26(2): 260-263.
- [7] 刘艳红. 一类基于模型的时延网络控制系统的稳定性分析[J]. 信息与控制, 2006, 35(1): 98-102.
- [8] 邱占芝. 不确定时延输出反馈网络化系统保性能控制[J]. 控制理论与应用, 2007, 24(2): 274-278.
- [9] Walsh G C, Hong Y, Bushnell L. Stability analysis of networked control systems[J]. Control Systems Technology, IEEE Transactions on, 2002, 10(3): 438-446.
- [10] Azimi-Sadjadi B. Stability of networked control systems in the presence of packet losses[C]//42nd IEEE Conference on Decision and Control. Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2003: 676-681.